

FEB 2010 : ^{Primitive} ogni due antiderivate di una funzione diff. per una costante

FEB 2010 : Teorema di Fermat

APR 2010 : Teorema di unicità del limite

APR 2010 : Teorema di Rolle

GIU 2010 : Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$
(Teorema sulle somme di limiti)

GIU 2010 : Il prodotto di due funzioni continue in $x_0 \in \mathbb{R}$ è continuo in x_0

SET 2010 : Applicazione del Teor. de' carabinieri
+

Teorema di unicità del limite

GIU 2010 Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = M$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Rightarrow L = M$ (unicità del limite)

Ogni due antiderivate di una funzione differiscono per una costante.

Dim.

Sia $f(x)$ una funzione

E siano $F(x)$ e $G(x)$ due sue antiderivate (primitive)

$$\text{cioè } F(x)' = f(x) \quad \text{e } G(x)' = f(x)$$

Allora

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Cioè

$$(F(x) - G(x))' = 0 \Rightarrow F(x) - G(x) = C !$$

Teorema di Fermat

Enunciato

Ipotesi Sia (a, b) un intervallo, sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia

$$x_0 \in]a, b[\quad (1)$$

un punto di estremo relativo per f . Supponiamo che

$$f \text{ sia derivabile in } x_0. \quad (2)$$

Allora

Tesi

$$f'(x_0) = 0. \quad (3)$$

Dimostrazione Supponiamo, per fissare le idee, che x_0 sia un punto di **minimo relativo**. Ricordiamo che x_0 è un punto di massimo relativo per f se esistono a^* e b^* tali che

$$a \leq a^* < x_0 < b^* \leq b \quad (4)$$

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in [a^*, b^*]. \quad (5)$$

Per dimostrare la (3) facciamo vedere che si deve avere *contemporaneamente*

$$f'(x_0) \geq 0. \quad (6)$$

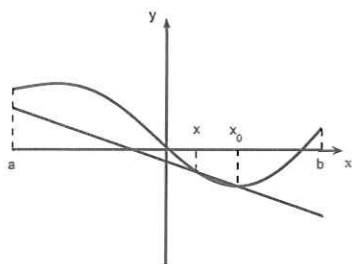
e

$$f'(x_0) \leq 0. \quad (7)$$

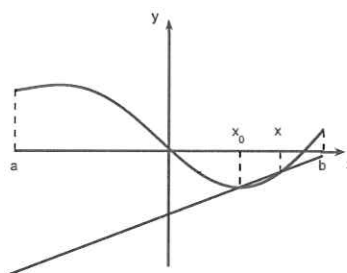
Per questo consideriamo per $x \neq x_0$ il *rapporto incrementale*

$$R(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (8)$$

Notiamo che $R(x)$ rappresenta la pendenza della retta congiungente i punti $(x, f(x))$ e $(x_0, f(x_0))$ (v. figura).



Il caso $x < x_0$



Il caso $x > x_0$

Sappiamo che $f'(x_0)$ è il limite di $R(x)$ per x che tende a x_0 , e che tale limite esiste, grazie alla (2). In particolare esisteranno il *limite sinistro* ed il *limite destro* (stiamo usando la (1)), e saranno uguali:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} R(x) = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} R(x). \quad (9)$$

Esaminiamo dapprima il *limite sinistro*: per $x < x_0$ avremo che il denominatore di $R(x)$ in (8) sarà < 0 , ed il numeratore, dalla (5), sarà ≥ 0 per $a^* \leq x < x_0$: quindi avremo

$$R(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\geq 0}{< 0} \leq 0 \quad \forall x \in [a^*, x_0[.$$

Per il *teorema della permanenza del segno* avremo quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} R(x) \leq 0,$$

e quindi (usando la prima delle (9)) otteniamo la (6).

Possiamo ora fare un ragionamento analogo per il *limite destro*: per $x_0 < x$ avremo che il denominatore di $R(x)$ in (8) sarà > 0 , ed il numeratore, dalla (5), sarà ancora ≥ 0 per $x_0 < x \leq b^*$. Quindi avremo

$$R(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\geq 0}{> 0} \geq 0 \quad \forall x \in]x_0, b^*]$$

Per il *teorema della permanenza del segno* avremo quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} R(x) \geq 0$$

quindi (usando la seconda delle (9)) otteniamo la (7). Come abbiamo già osservato, dalla (6) e dalla (7) segue poi, immediatamente, la tesi (3).

TEOREMA DI UNICITA' DEL LIMITE

IPOTESI

Se una funzione $f(x)$, per $x \rightarrow c$, ammette un limite allora esso è unico

TESI

d'imostrazione

Per assurdo supponiamo che $f(x)$ ammetta due limiti distinti

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = l_2 \quad ; \quad l_1 \neq l_2$$

applico la definizione di limite in entrambi i casi

$$|f(x) - l_1| < \varepsilon$$

$$l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$$

$$l_1 - \frac{l_1 - l_2}{2} < f(x) < l_1 + \frac{l_1 - l_2}{2}$$

$$\frac{2l_1 - l_1 + l_2}{2} < f(x) < \frac{2l_1 + l_1 - l_2}{2}$$

$$\frac{l_1 + l_2}{2} < f(x) < \frac{3l_1 - l_2}{2}$$

$$|f(x) - l_2| < \varepsilon \quad \text{... che}$$

$$l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon \quad \text{pongo } \varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2}$$

$$l_2 - \frac{l_1 - l_2}{2} < f(x) < l_2 + \frac{l_1 - l_2}{2}$$

$$\frac{2l_2 - l_1 + l_2}{2} < f(x) < \frac{2l_2 + l_1 - l_2}{2}$$

$$\frac{3l_2 - l_1}{2} < f(x) < \frac{l_2 + l_1}{2}$$

$$\frac{l_1 + l_2}{2} < f(x) < \frac{l_2 + l_1}{2}$$

Cioè $f(x)$ deve essere contemporaneamente sia

strettamente maggiore che

" minore di una stessa quantità!

Cioè È ASSURDO. Quindi supporre di avere due limiti diversi è assurdo $\Rightarrow$ il limite può solo essere unico

Teorema di Rolle

Enunciato

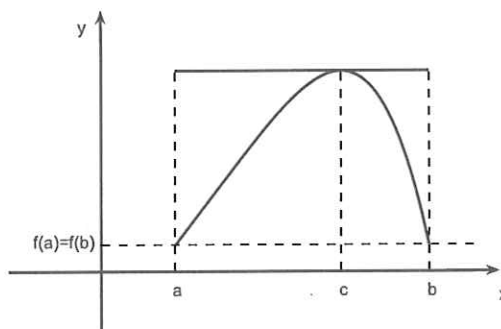
Ipotesi Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- (i) $f \in C^0([a, b])$,
- (ii) f è derivabile in $]a, b[$,
- (iii) $f(a) = f(b)$.

Allora:

Tesi Esiste almeno un $c \in [a, b]$ tale che

$$f'(c) = 0. \quad (1)$$



Dimostrazione Dalla (i) e dal teorema della esistenza dei massimi e minimi, otteniamo che devono esistere due punti x_m e x_M , entrambi in $[a, b]$, tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a, b]. \quad (2)$$

A questo punto si danno, ovviamente, *due* casi

- I - Almeno uno, tra x_m e x_M , sta in $]a, b[$ (cioè è *interno* all'intervallo $[a, b]$).
- II - Entrambi x_m e x_M sono negli estremi.

La seconda ipotesi, a priori, darebbe luogo a quattro sottocasi: $\{x_m = x_M = a\}$, oppure $\{x_m = x_M = b\}$, oppure $\{x_m = a, x_M = b\}$, oppure $\{x_m = b, x_M = a\}$. Ma, tenuto conto della (iii), in tutti e quattro i casi avremmo sempre $f(x_m) = f(x_M)$, e quindi, dalla (2) $f(x) \equiv f(x_m) \equiv f(x_M)$. Insomma: se si verifica il caso II, la funzione f risulta essere costante, e quindi la sua derivata è nulla in tutto $]a, b[$, e quindi qualunque punto di $]a, b[$ può essere preso come "punto c ".

Consideriamo ora il caso I, e supponiamo, per fissare le idee, che sia x_M a essere in $]a, b[$. Avremmo allora un *massimo relativo interno*. È facile vedere che tutte le altre ipotesi del Teorema di Fermat sono verificate, e quindi lo possiamo applicare. La tesi del Teorema di Fermat ci dice allora che $f'(x_M) = 0$. Quindi la (1) risulta verificata prendendo $c = x_M$.

IL LIMITE DELLA SOMMA È LA SOMMA DEI LIMITI

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$$

dim

per la def. di limite prendendo $\epsilon = \frac{\epsilon}{2}$ si ha che

$$\forall \frac{\epsilon}{2} > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{aligned} |f(x) - l_1| &< \frac{\epsilon}{2} \\ |g(x) - l_2| &< \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$|f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| = |f(x) - l_1 + g(x) - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |g(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$$\text{cioè } |f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$$

CONTINUITÀ DELLA SOMMA DI FUNZIONI CONTINUE

Se $f(x)$ è una funzione continua
e $g(x)$ è una " " "

Allora $f(x) + g(x)$ è anch'essa continua

D.M

$f(x)$ continua in $x_0 \Rightarrow \exists l_1 \text{ t.c. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 = f(x_0)$

$g(x)$ continua in $x_0 \Rightarrow \exists l_2 \text{ t.c. } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 = g(x_0)$

Dalla definizione di limite prendendo $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ si ha

$$- |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$- |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Allora si ha questo sistema di disuguaglianze

$$|f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| = |f(x) - l_1 + g(x) - l_2| \leq \underbrace{|f(x) - l_1|}_{(*) < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|g(x) - l_2|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Cioè ho scritto che

$$|f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| < \varepsilon \quad \text{che coincide con la def. di limite}$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = l_1 + l_2 = f(x_0) + g(x_0)$ cioè $f(x) + g(x)$ è continua

$$*) |a+b| \leq |a| + |b|$$

CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI

DERIVABILITÀ $\Rightarrow$ CONTINUITÀ

Una funzione derivabile in un intervallo è ivi continua

d.m.

definizione di derivabile di $f(x)$ in x_0 :

$$\text{Esiste finito il } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

devo dimostrare che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (def. di continuità)

$$f(x) = f(x) + f(x_0) - f(x_0) = f(x_0) + f(x) - f(x_0) =$$

↑
sommo e
sottraggo $f(x_0)$

$$= f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \cdot (x - x_0) \quad \text{cioè ho ottenuto}$$

↑
moltiplico e
divido entrambi i termini
per $(x - x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} (x - x_0)$$

passo ai limiti di
entrambi i membri

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) (x_0 - x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Cioè $f(x)$ è continua in x_0

CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE PRODOTTO

Se $f(x)$ è una funzione continua

e $g(x)$ " " " "

Allora fg è anch'essa continua

dim

$f(x)$ continua in $x_0 \Rightarrow \exists l_1 \text{ T.c. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 = f(x_0)$

$g(x)$ " " " $\Rightarrow \exists l_2 \text{ T.c. } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 = g(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} ((f(x) - l_1)(g(x) - l_2) + f(x)l_2 + g(x)l_1 - l_1l_2) =$$

$$= (l_1 - l_1)(l_2 - l_2) + l_1l_2 + l_2l_1 - l_1l_2 =$$

$$= 0 + l_1l_2 = l_1l_2 = f(x_0)g(x_0)$$

Cioè $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = f(x_0)g(x_0)$ che è la definizione della continuità di $f(x) \cdot g(x)$ cioè la Tesi

C.V.D.

DEFINIZIONE DI LIMITE

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in (a, b)$ in cui $0 < |x - x_0| \leq \delta$

Allora $|f(x) - l| \leq \varepsilon$

Se prendo due numeri piccoli ε e δ positivi

allora non appena x d'ista da x_0 per meno di δ

succede che $f(x)$ d'ista da l per meno di ε

OSSERVAZIONI: x_0 può essere

x_0
 x_0^+
 x_0^-
 $\pm \infty$

l può essere

l finito
 $+\infty$
 $-\infty$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

ENUNCIATO: Sia $f(x)$ una funzione continua in $\mathbb{R}$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$$

cioè se la funzione ha un limite positivo

allora

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta$$

$$\text{per cui } f(x) > 0$$

cioè la funzione è positiva in un intorno di x_0

Dimostrazione

Scrivo la definizione di limite

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \quad 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha } |f(x) - l| < \varepsilon$$

per prendo $\varepsilon = \frac{l}{2}$ (essendo $l > 0 \Rightarrow \frac{l}{2} > 0$! quindi va bene per ε)

e riscrivo la seconda parte della def. di limite

$$|f(x) - l| < \frac{l}{2} \Rightarrow l - \frac{l}{2} < f(x) < l + \frac{l}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{2l - l}{2} < f(x) < \frac{2l + l}{2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{l}{2} < f(x) \right) < \frac{3}{2}l$$

$$\hookrightarrow f(x) > \frac{l}{2} > 0 \Rightarrow \boxed{f(x) > 0} \quad \text{che era la tesi}$$

f è maggiore di

una cosa positiva $\Rightarrow f$ è positiva

oss: il teorema vale anche nel caso $l < 0$.

Vale dire che la funzione assume nell'intorno del ~~se~~ limite il suo (del limite) stesso segno

DEFINIZIONE DI FUNZIONE CONTINUA

CONTINUITA' IN UN PUNTO :

Sia (a,b) un intervallo

Sia $f(x)$ una funzione definita in (a,b)

$f(x)$ è continua in $x_0 \in]a,b[$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè se il limite coincide con
il valore della funt. in quel punto

CONTINUITA' IN UN INTERVALLO

$f(x)$ è continua in un intervallo se è continua in
tutti i punti dell'intervallo

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue allora sono
continue anche :

$$f(x) + g(x)$$

$$f(x) - g(x)$$

$$f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ se } g(x) \neq 0$$

dimostrazione a parte

IL LIMITE DEL PRODOTTO È IL PRODOTTO DEI LIMITI

Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni tal che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = l_1 \cdot l_2$$

dim. dalle def. di limite si ha che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$$|f(x) - l_1| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < \varepsilon + l_1$$

$$|g(x) - l_2| < \varepsilon$$

Però ho le seguenti espressioni di opportune:

$$|fg - l_1 l_2| = |fg - \overbrace{l_2 f + l_1 f}^{\text{aggiungo e sottraggo}} - l_1 l_2| = |f(g - l_2) + l_1(f - l_1)| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f|}_{< \varepsilon + l_1} \underbrace{|g - l_2|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|l_1|}_{< \varepsilon} \underbrace{|f - l_1|}_{< \varepsilon} < (\varepsilon + l_1)\varepsilon + l_1\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon + l_1 + l_1) \quad \text{ma } \varepsilon < 1 \text{ m.}$$

$$< \underbrace{\varepsilon(1 + l_1 + l_2)}_K = K\varepsilon$$

però ho $|fg - l_1 l_2| < K\varepsilon$

per l'arbitrarietà di ε ho che
vale: $\lim_{x \rightarrow x_0} fg = l_1 l_2$

Teorema del confronto (o dei due carabinieri)

Teorema. Siano f, g, h tre funzioni definite nello stesso intervallo, tranne al più un punto c di questo, e tali che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Supponiamo inoltre che

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = l.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l.$$

Dimostrazione

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = l$$

dalla definizione di limite segue che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_1(c) \quad \text{t.c.} \quad \text{per ogni } x \neq c, x \in I_1(c) \quad \text{si ha} \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

e

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I_2(c) \quad \text{t.c.} \quad \text{per ogni } x \neq c, x \in I_2(c) \quad \text{si ha} \quad l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon.$$

Sia

$$I(c) = I_1(c) \cap I_2(c).$$

Allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(c) \quad \text{t.c.} \quad \text{per ogni } x \neq c, x \in I(c) \quad \text{si ha} \quad l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon.$$

Pertanto

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(c) \quad \text{t.c.} \quad \text{per ogni } x \neq c, x \in I(c) \quad \text{si ha} \quad l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon,$$

ovvero

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l.$$

Osservazione: Nella dimostrazione del teorema stiamo supponendo che il valore l del limite sia finito. Il teorema continua a sussistere anche quando $l = +\infty$ oppure $l = -\infty$. Per dimostrarlo, è sufficiente ripercorre la dimostrazione, utilizzando la definizione di limite appropriata. Lasciamo al lettore la verifica.